EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* …022**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine modulul numărului complex $i^3 + 2$.

(4p) **b)** Să se arate că punctele $D(2,1)$, $E(3,2)$ și $F(4,3)$ sunt coliniare.

(4p) **c)** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}$.

(4p) **d)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(-1,1)$, $B(1,-1)$, $C(2,0)$.

(2p) **e)** Să se determine $c \in \mathbf{R}$ știind că punctul $P(c,1)$ este situat pe dreapta de ecuație $2x - y - 3 = 0$.

(2p) **f)** Să se dea un exemplu de punct $M(a,b)$ situat pe parabola de ecuație $y^2 = 4x$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Știind că $a = \log_2 3$ și $b = \log_2 6$, să se arate că $b - a \in \mathbf{N}$.

(3p) **b)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \sqrt{1} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{6} \end{vmatrix}$.

(3p) **c)** Să se dea un exemplu de matrice diferite $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ pentru care $\det(A) = \det(B)$.

(3p) **d)** Să se arate că funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ nu este injectivă.

(3p) **e)** Să se afle numărul submulțimilor mulțimii $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ care conțin elementul 0.

2.

(3p) **a)** Să se arate că funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x$ este crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{2x}}$.

(3p) **c)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, în punctul de abscisă $x = 1$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx$.

(3p) **e)** Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră $f \in \mathbf{Z}[X]$ un polinom cu coeficienți întregi.

(4p) **a)** Să se arate că $a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + ... + ab^{k-2} + b^{k-1})$, $\forall a,b \in \mathbf{R}$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **b)** Să se arate că pentru orice $a,b \in \mathbf{Z}$, $a \neq b$, numărul $f(a) - f(b)$ este divizibil cu $(a-b)$.

(4p) **c)** Să se arate că dacă $f(0) = 1$, atunci $f(3) \neq 5$.

(2p) **d)** Dacă $f(2006) = 2007$ și $f(2007) = 1003$, să se arate că polinomul f nu are rădăcini întregi.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $a,b \in \mathbf{Z}$, $a \neq b$, atunci există $h \in \mathbf{Z}[X]$, astfel încât $h(a) = b$ și $h(b) = a$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $a,b,c \in \mathbf{Z}$, $a < b < c$, atunci ***nu*** există $g \in \mathbf{Z}[X]$ astfel încât $g(a) = b$, $g(b) = c$ și $g(c) = a$.

(2p) **g)** Să se determine valorile lui $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ pentru care există numerele întregi $a_1, a_2, ..., a_n$ distincte și polinomul $u \in \mathbf{Z}[X]$ astfel încât $u(a_1) = a_2$, $u(a_2) = a_3$, ..., $u(a_{n-1}) = a_n$ și $u(a_n) = a_1$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a, b > 1$.

(4p) **a)** Să se calculeze $B(2, 2)$.

(4p) **b)** Să se arate că $B(a, 2) = \dfrac{1}{a \cdot (a+1)}$, $\forall\, a > 1$.

(4p) **c)** Să se arate că $B(a, b) = B(b, a)$, $\forall\, a, b > 1$.

(2p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \left(B(2, 2) + B(2, 3) + ... + B(2, n)\right)$.

(2p) **e)** Să se demonstreze relația $B(a, b) = \dfrac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1)$, $\forall\, a > 1$, $\forall\, b > 2$.

(2p) **f)** Să se arate că $B(m,n) = \dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$, $\forall\, m, n \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$, $n \geq 2$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} B(n,n)$.